*Natural Science: Journal of Science and Technology*
Vol 7 (1) : 127 – 137 *(Maret 2018)*
ISSN-p: 2338-0950
ISSN-e: 2541-1969

# Graf Pembagi Nol dari Semiring Matriks atas Semiring Boolean

# Zero Divisor Graph of Semiring of Matrices over Boolean Semiring

Vika Yugi Kurniawan*

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret

## ABSTRACT

The zero-divisor graph of a semiring $S$, denoted by $\Gamma(S)$, is the (simple) graph whose vertex set is the set of non-zero zero-divisors of $S$. Two distinct vertices are connected by an edge if their product is zero. In this paper we study the properties of the right zero divisors and the left zero divisors of semiring of matrices over Boolean semiring $M_n(\mathfrak{B})$ and then use these results to determine the diameter of the graph $\Gamma\big(M_n(\mathfrak{B})\big)$.

**Keywords : *zero divisor graph, diameter of a graph, semiring of matrices, Boolean semiring.***

## ABSTRAK

Untuk setiap semiring $S$ yang memiliki pembagi nol sejati dapat dibentuk suatu graf graf pembagi nol $\Gamma(S)$. Himpunan semua pembagi nol sejati dari $S$ yang dinotasikan $Z(S)^*$ sebagai himpunan verteks dari graf $\Gamma(S)$. Dua verteks berbeda $x$ dan $y$ di $Z(S)^*$ saling terhubung oleh sebuah edge jika dan hanya jika berlaku $xy = 0$ atau $yx = 0$. Pada makalah ini dipelajari sifat-sifat pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan dari semiring matriks atas semiring Boolean, dinotasikan $M_n(\mathfrak{B})$. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menentukan diameter dari graf $\Gamma\big(M_n(\mathfrak{B})\big)$.

**Kata Kunci:** ***graf pembagi nol, diameter graf, semiring matriks, semiring Boolean.***

*Coresponding Author : vikayugi@staff.uns.ac.id, vikayugi@gmail.com (phone: +62-856-2528-707)*

## 1. Pendahuluan

Konsep tentang graf pembagi nol pertama kali diperkenalan oleh Beck (1988) dalam kajiannya tentang ring komutatif $R$. Graf pembagi nol didefinisikan sebagai graf sederhana dengan himpunan verteksnya adalah elemen-elemen pembagi nol di dalam ring $R$ dan dua verteks $x$ dan $y$ saling terhubung jika $xy = 0$. Kajian tentang graf pembagi nol ini berkembang sangat cepat. Anderson dan Livingston (1999) melakukan kajian yang cukup mendalam tentang graf pembagi nol dari ring komutatif. Pada tahun-tahun berikutnya banyak peneliti yang mengkaji sekaligus mengembangkan gagasan tentang graf pembagi nol. Redmond (2002) mengembangkan konsep tentang graf pembagi nol pada kasus ring non-komutatif. Lebih jauh lagi, Dozlan dan Oblak (2012) mengembangkan kajian graf pembagi nol dari semiring.

Berikutnya, John dan Vijay (2014) melakukan kajian tentang graf pembagi nol dari semiring matriks atas semiring Boolean. Dalam kajian tersebut telah ditentukan diameter graf pembagi nol dari semiring matriks atas semiring Boolean atau yang dinotasikan dengan $\Gamma\big(M_n(\mathfrak{B})\big)$. Pada makalah ini dipelajari sifat-sifat pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan dari semiring matriks atas semiring Boolean, dinotasikan $M_n(\mathfrak{B})$. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menentukan diameter dari graf $\Gamma\big(M_n(\mathfrak{B})\big)$. Penulisan makalah ini bersifat studi kepustakaan yang mengacu pada hasil kajian John dan Vijay (2014) dengan menyertakan konsep dasar dari graf pembagi nol beserta contoh-contoh.

## 2. Semiring Matriks atas Semiring Boolean $M_n(\mathfrak{B})$

Menurut Golan [4], semiring adalah himpunan tak kosong $S$ yang dilengkapi operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(.)$ yang didefinsikan sedemikian sehingga memenuhi kondisi-kondisi berikut:

1. $(S, +)$ adalah monoid komutatif dengan elemen netral 0, artinya untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku:
   (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (ii) $a + 0 = 0 + a = a$
   (iii) $a + b = b + a$
2. $(S,\ .)$ adalah monoid dengan elemen indentitas 1, artinya untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku:
   (i) $(ab)c = a(bc)$
   (ii) $a1 = 1a = a$
3. Distributif pergandaan atas penjumlahan dari kedua sisi, artinya untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku:
   (i) $(a + b)c = ac + bc$
   (ii) $a(b + c) = ab + ac$
4. Elemen netral terhadap operasi penjumlahan juga merupakan elemen

penyerap terhadap pergandaan, artinya $0s = 0 = s0$, untuk semua $s \in S$.

Untuk menghindari kasus trivial, dalam pembahasan ini ditentukan 0 sebagai satu-satunya elemen penyerap. Jika terdapat $z \in S$ yang memenuhi $zs = z = sz, \forall z \in S$ maka $0 = 0z = z$. Suatu elemen $x \in S$ disebut sebagai pembagi nol kanan jika terdapat $0 \neq y \in S$ sedemikian hingga $yx = 0$. Himpunan dari semua pembagi nol kanan dinotasikan dengan $Z_R(S)$. Suatu elemen $x \in S$ disebut sebagai pembagi nol kiri jika terdapat $0 \neq y \in S$ sedemikian hingga $xy = 0$. Himpunan dari semua pembagi nol kiri dinotasikan dengan $Z_L(S)$. Himpunan semua pembagi nol dari semiring $S$ dinotasikan $Z(S)$ dengan $Z(S) = \{x \in S \mid (\exists 0 \neq y \in S)\ xy = 0 \text{ atau } yx = 0\}$.

Pada makalah Guzman[5] yang mengacu kepada Kuich[7], semiring Boolean $(\mathfrak{B}, +, .)$ didefinisikan sebagai semiring dengan dua buah elemen $\{0,1\}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(.)$ yang definisinya seperti pada tabel 1.

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| . | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Tabel 1. Operasi pada semiring Boolean

Suatu semiring yang anggotanya berupa matriks-matriks persegi atas semiring Boolean berukuruan $n \times n$ disebut dengan semiring matriks atas semiring Boolean, dan dinotasikan dengan $M_n(\mathfrak{B})$. Pada semiring $M_n(\mathfrak{B})$, matriks yang hanya memiliki entri 1 pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dan 0 untuk semua entri yang lain dinotasikan dengan $E_{i,j}$.

**Contoh 2.1** Semiring matriks atas semiring Boolean $M_2(\mathfrak{B})$.

Contoh yang dipilih adalah semiring matriks atas semiring Boolean berordo $2 \times 2$ atau $M_2(\mathfrak{B})$. Untuk mempermudah identifikasi, diberikan nama untuk setiap elemen pembagi nol sejati pada $M_2(\mathfrak{B})$. Himpunan $R$ didefinisikan sebagai himpunan semua pembagi nol kanan di $M_2(\mathfrak{B})$ dan himpunan $L$ sebagai himpunan semua pembagi nol kiri di $M_2(\mathfrak{B})$. Sedangkan $R' = R - (R \cap L)$ dan $L' = L - (R \cap L)$. Elemen-elemen di $R'$ dinotasikan $r_i$ dengan $i = 1,2,3, \ldots$, elemen-elemen di $L'$ dinotasikan $l_i$ dengan $i = 1,2,3, \ldots$, sedangkan elemen-elemen di $R \cap L$ dinotasikan $s_i$ dengan $i = 1,2,3, \ldots$. Berikut adalah elemen-elemen pembagi nol sejati di $M_2(\mathfrak{B})$.

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad s_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada Contoh 2.1 ini, bisa ditulis juga $s_1 = E_{1,1}$, $s_2 = E_{1,2}$, $s_3 = E_{2,1}$ dan $s_4 = E_{2,2}$.

**Proposisi 2.2** *Diberikan matriks $A, B \in M_n(\mathfrak{B})$. Jika $A$ adalah matriks tak nol dan $B$ merupakan matriks yang semua barisnya tak nol, maka hasil kali $AB$ merupakan matriks tak nol.*

**Bukti**

Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $A = E_{p,q}$. Diambil sebarang matriks $B$ yang semua barisnya tak nol, $B = [b_{jk}]$ dengan $b_{jk} = 1$ untuk paling sedikit sebuah $k = 1,2,\dots,n$ untuk setiap $j = 1,2,\dots,n$. Baris ke-$p$ dari matriks hasil kali $AB$ adalah $[c_{p1}\ c_{p2} \dots c_{pn}]$ dengan $c_{pk} = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} b_{ik}$ untuk $k = 1,2,\dots,n$. Karena pada matriks A hanya terdapat sebuah entri tak nol yaitu $a_{pq} = 1$ maka diperoleh baris ke-$p$ dari matriks $AB$ adalah $[b_{q1}\ b_{q2} \dots b_{qn}]$. Karena terdapat $b_{qk} = 1$ untuk paling sedikit sebuah $k = 1,2,\dots,n$, maka baris ke-$p$ tersebut merupakan baris tak nol. Ini menunjukkan bahwa matriks $AB$ merupakan matriks tak nol.

**Teorema 2.3** *Setiap pembagi nol kanan memiliki setidaknya satu baris nol.*

**Bukti**

Diberikan matriks $B$ yang merupakan pembagi nol kanan, artinya terdapat matriks tak nol $A \in M_n(\mathfrak{B})$ sedemikian hingga $AB = 0$. Diandaikan $B$ merupakan matriks yang semua barisnya tak nol, menurut proposisi 2.2 diperoleh $AB \neq 0$. Hal ini kontrakdiksi dengan fakta bahwa $AB = 0$. Dengan demikian matriks $B$ pasti memiliki setidaknya sebuah baris nol.

**Teorema 2.4** *Setiap matriks di $M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki setidaknya satu baris nol merupakan pembagi nol kanan.*

**Bukti**

Diambil sebarang matriks $B \in M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki tepat satu baris nol, misalkan baris ke-$i$ adalah baris nol. Dengan demikian terdapat matriks $E_{i,i}$ sedemikian hingga $E_{i,i}B = 0$. Jadi terbukti bahwa $B$ merupakan pembagi nol kanan. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa matriks-matriks di $M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki dua baris nol, tiga baris nol,..., $(n-1)$ baris nol juga merupakan pembagi nol kanan. Jadi, setiap matriks di $M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki setidaknya satu baris nol merupakan pembagi nol kanan.

**Proposisi 2.5** *Diberikan matriks $A, B \in M_n(\mathfrak{B})$. Jika $A$ adalah matriks yang semua kolomnya tak nol dan $B$ merupakan matriks tak nol, maka hasil kali $AB$ merupakan matriks tak nol.*

ISSN-p: 2338-0950
ISSN-e: 2541-1969

**Bukti**

Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan matriks tak nol $B = E_{p,q}$. Diambil sebarang matriks $A$ yang semua kolomnya tak nol, $A = [a_{ij}]$ dengan $a_{ij} = 1$ untuk paling sedikit sebuah $i = 1,2,\dots,n$ untuk setiap $j = 1,2,\dots,n$. Kolom ke-$q$ dari matriks hasil kali $AB$ adalah $[c_{1q}\ c_{2q} \dots c_{nq}]^T$ dengan $c_{kq} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{iq}$ untuk $k = 1,2,\dots,n$. Karena pada matriks B hanya terdapat sebuah entri tak nol yaitu $b_{pq} = 1$ maka diperoleh kolom ke-$q$ dari matriks $AB$ adalah $[a_{1p}\ a_{2p} \dots a_{np}]^T$. Karena $a_{ip} = 1$ untuk paling sedikit sebuah $i = 1,2,\dots,n$, maka kolom ke-$q$ tersebut merupakan kolom tak nol. Ini menunjukkan bahwa matriks $AB$ merupakan matriks tak nol.

**Teorema 2.6** *Setiap pembagi nol kiri memiliki setidaknya satu kolom nol.*

**Bukti**

Diberikan matriks $A$ yang merupakan pembagi nol kiri, artinya terdapat matriks tak nol $B \in M_n(\mathfrak{B})$ sedemikian hingga $AB = 0$. Diandaikan $A$ merupakan matriks yang semua kolomnya tak nol, menurut proposisi 2.5 diperoleh $AB \neq 0$. Hal ini kontrakdiksi dengan fakta bahwa $AB = 0$. Dengan demikian matriks $A$ pasti memiliki setidaknya sebuah kolom nol.

**Teorema 2.7** *Setiap matriks di $M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki setidaknya satu kolom nol merupakan pembagi nol kiri.*

**Bukti**

Diambil sebarang matriks $A \in M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki tepat satu kolom nol, misalkan kolom ke-$i$ adalah kolom nol. Dengan demikian terdapat matriks $E_{i,i}$ sedemikian hingga $AE_{i,i} = 0$. Jadi terbukti bahwa $A$ merupakan pembagi nol kiri. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa matriks-matriks di $M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki dua kolom nol, tiga kolom nol, ..., $(n-1)$ kolom nol juga merupakan pembagi nol kiri. Jadi, terbukti setiap matriks di $M_n(\mathfrak{B})$ yang memiliki setidaknya satu kolom nol merupakan pembagi nol kiri.

**Akibat 2.8** *Matriks $E_{i,j}$ merupakan pembagi nol kanan sekaligus pembagi nol kiri.*

**Bukti**

Jelas hal ini merupakan implikasi dari teorema 2.4 dan 2.7.

Sebagai contoh dari akibat 2.8 di atas, perhatikan kembali martiks-matriks di $R \cap L$ pada contoh 2.1. Matriks-matriks $s_1 = E_{1,1}, s_2 = E_{1,2}, s_3 = E_{2,1}$ dan $s_4 = E_{2,2}$ jelas merupakan pembagi nol kanan sekaligus pembagi nol kiri di $M_2(\mathfrak{B})$.

**Lemma 2.9** *Jika matriks $X$ merupakan pembagi nol kiri dengan kolom ke-p sebagai satu-satunya kolom nol, maka* $XE_{p,j} = 0$.

**Bukti**

Diberikan matriks $X = [x_{ij}]$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$. Karena kolom ke-$p$ dari matriks $X$ merupakan kolom nol, maka $x_{ip} = 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Diambil matriks $E_{p,j} = [e_{ij}], i = 1,2, \dots, n,$ $j = 1,2, \dots, n$ dengan $e_{pj} = 1$ dan semua entri yang lain yaitu $e_{ij} = 0$. Dari sini diperoleh entri ke-$(i,j)$ dari $XE_{p,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}e_{kj} = x_{ip} = 0$. Dengan demikian $XE_{p,j} = 0$ untuk $j = 1,2, \dots, n$.

**Lemma 2.10** *Jika matriks $Y$ merupakan pembagi nol kanan dengan baris ke-q sebagai satu-satunya baris nol, maka* $E_{i,q}Y = 0$.

**Bukti**

Diberikan matriks $Y = [y_{ij}]$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$. Karena baris ke-$q$ dari matriks $R$ merupakan baris nol, maka $y_{qj} = 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Diambil matriks $E_{i,q} = [e_{ij}], i = 1,2, \dots, n,$ $j = 1,2, \dots, n$ dengan $e_{iq} = 1$ dan semua entri yang lain yaitu $e_{ij} = 0$. Dari sini diperoleh entri ke-$(i,j)$ dari $E_{i,q}Y = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}y_{kj} = y_{qj} = 0$. Dengan demikian $E_{i,q}Y = 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$.

## 3. Graf Pembagi Nol dari $M_n(\mathfrak{B})$

Graf pembagi nol dari semiring $S$ yang dinotasikan dengan $\Gamma(S)$ merupakan graf sederhana yang himpunan verteksnya adalah himpunan semua pembagi nol sejati dari $S$, atau dengan kata lain himpunan verteks $V(\Gamma(S))$ adalah himpunan $Z(S)^* = Z(S) - \{0\}$. Pasangan dua elemen pembagi nol yang berbeda $x, y \in V(\Gamma(S))$ adalah sebuah edge di graf $\Gamma(S)$ jika dan hanya jika $xy = 0$ atau $yx = 0$.

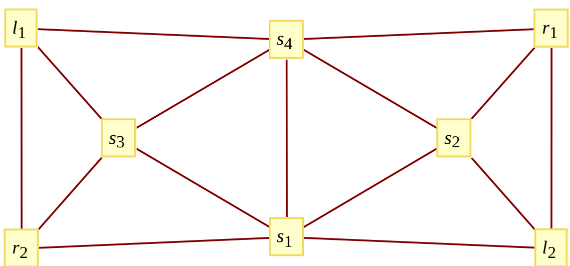
Untuk memahami konsep graf pembagi nol ini, selanjutnya akan dibahas salah satu contoh graf pembagi nol dari semiring matriks atas semiring Boolean $\Gamma(M_n(\mathfrak{B}))$.

**Contoh 3.1** Diberikan semiring matriks atas semiring Boolean berorde $2 \times 2$ dinotasikan $M_2(\mathfrak{B})$. Graf pembagi nol dari $M_2(\mathfrak{B})$ dinotasikan $\Gamma(M_2(\mathfrak{B}))$. Perhatikan kembali Contoh 2.1, himpunan verteks dari graf pembagi nol $\Gamma(M_2(\mathfrak{B}))$ tidak lain adalah himpunan semua pembagi nol sejati dari $M_2(\mathfrak{B})$. Dengan demikian himpunan verteksnya $V\left(\Gamma(M_2(\mathfrak{B}))\right) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, r_1, r_2, l_1, l_2\}$. Selanjutnya untuk mengetahui keterhubungan antara satu verteks dengan verteks yang lain, Tabel 2 memperlihatkan hasil kali dari setiap dua verteks di $V\left(\Gamma(M_2(\mathfrak{B}))\right)$.

| $\cdot$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $r_1$ | $r_2$ | $l_1$ | $l_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | | $x_i$ | 0 | 0 | $x_i$ | 0 | $x_i$ | $x_i$ |
| $s_2$ | 0 | | $x_i$ | $x_i$ | 0 | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ |
| $s_3$ | $x_i$ | $x_i$ | | 0 | $x_i$ | 0 | $x_i$ | $x_i$ |
| $s_4$ | 0 | 0 | $x_i$ | | 0 | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ |
| $r_1$ | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ | | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ |
| $r_2$ | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ | $x_i$ | | $x_i$ | $x_i$ |
| $l_1$ | $x_i$ | $x_i$ | 0 | 0 | $x_i$ | 0 | | $x_i$ |
| $l_2$ | 0 | 0 | $x_i$ | $x_i$ | 0 | $x_i$ | $x_i$ | |

Tabel 2. Hasil kali verteks-verteks di $V\left(\Gamma\left(M_2(\mathfrak{B})\right)\right)$

Tabel 2 memperlihatkan hasil kali dari setiap dua elemen pembagi nol di $M_2(\mathfrak{B})$ dengan urutan perkalian dari baris ke kolom tabel. Makna $x_i$ pada tabel berarti hasil kali dari kedua elemen tidak sama dengan $0$. Perlu diingat bahwa konsep graf disini adalah graf sederhana yang tidak memuat loop, sehingga hasil kali antara suatu elemen pembagi nol dengan dirinya sendiri tidak perlu diselidiki. Dari hasil kali pada tabel di atas dapat diketahui keterhubungan antar verteks-verteks di $\Gamma\left(M_2(\mathfrak{B})\right)$ sehingga diperoleh graf pembagi nol dari $M_2(\mathfrak{B})$ seperti pada Gambar 1.




Gambar 1. Graf pembagi nol dari $M_2(\mathfrak{B})$

## 4. Diameter dari $\Gamma\left(M_n(\mathfrak{B})\right)$

Barisan edge-edge yang saling berurutan pada graf disebut sebagai path. Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap dua verteks yang berbeda terdapat sedikitnya sebuah path yang menghubungkan. Jarak antara dua buah verteks yang berbeda $x$ dan $y$, dinotasikan dengan $d(x,y)$ adalah panjang dari path terpendek yang menghubungkan keduanya. Diameter dari graf $\Gamma$ yang dinotasikan dengan $diam(\Gamma)$ adalah maksimum dari jarak setiap dua verteks berbeda pada graf $\Gamma$ atau bisa ditulis $diam(\Gamma) = \sup\{d(x,y) | \text{untuk semua } x,y \in V(\Gamma),\ x \neq y\}$.

Dalam kajian terdahulu, secara umum telah diperoleh bahwa diameter dari graf pembagi nol untuk setiap semiring $S$ selalu kurang dari atau sama dengan 3. Hal ini dapat dilihat dari teorema 4.1 yang dibuktikan oleh Dozlan dan Oblak [3].

**Teorema 4.1** *Untuk suatu semiring S, graf pembagi nol* $\Gamma(S)$ *selalu terhubung dan diameternya* $diam\left(\Gamma(S)\right) \leq 3$.

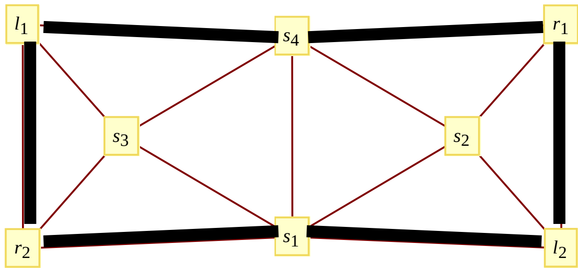
Selanjutnya pada makalah ini, ingin dipelajari secara khusus diameter graf pembagi nol dari semiring matriks berukuran $n \times n$ atas semiring Boolean $\mathfrak{B}$ yang dinotasikan dengan $M_n(\mathfrak{B})$, untuk $n > 1$. Pada pembahasan selanjutnya, notasi $R$ didefinisikan sebagai himpunan semua pembagi nol kanan di $M_n(\mathfrak{B})$ dan notasi $L$ sebagai himpunan semua pembagi nol kiri di n$(\mathfrak{B})$. Sedangkan $R' = R - (R \cap L)$ dan $L' = L - (R \cap L)$.

**Teorema 4.2** *Jika $x \in L$ dan $y \in R$, maka* $d(x, y) \leq 2$.

**Bukti**

Pada pembuktian ini akan dibedakan kedalam dua kasus yaitu $xy = 0$ dan $xy \neq 0$. Untuk kasus pertama, diambil $x \in L$. Jika $y$ pembagi nol kanan sedemikian hingga $xy = 0$ maka $d(x, y) = 1$. Untuk kasus kedua, dimisalkan $xy \neq 0$ yang artinya $d(x, y) \neq 1$. Diketahui $x \in L$ dan $y \in R$. Menurut Teorema 2.6, suatu pembagi nol kiri pasti memiliki setidaknya satu kolom nol. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa kolom ke-$p$ dari matriks $x$ adalah satu-satunya kolom nol. Dengan lemma 2.9, diperoleh $xE_{p,j} = 0$ untuk $j = 1,2, \dots, n$. Dengan demikian $d(x, E_{p,j}) = 1$ untuk $j = 1,2, \dots, n$. Dengan teorema 2.3, suatu pembagi nol kanan setidaknya memiliki satu baris nol. Jika baris ke-$q$ merupakan satu-satunya baris nol, maka dengan lemma 2.10 diperoleh $E_{i,q}y = 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Dengan demikian $d(E_{i,q}, y) = 1$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Dari sini pada kasus khusus diperoleh juga $E_{p,q}y = 0$ sehingga $xE_{p,q}y = 0$. Jadi $d(x, y) = 2$.

Perhatikan kembali Contoh 2.1 untuk memahami Teorema 4.1. Bisa dilihat pada gambar di bawah bahwa jarak untuk setiap $r_i$ dengan $l_i$ kurang dari atau sama dengan 2, sebagaimana yang diperlihatkan oleh path bergaris tebal.




**Lemma 4.3** *Jika $x$ adalah pembagi nol kanan dengan baris ke-$p$ sebagai satu-satunya baris nol maka setiap pembagi nol kiri dari $x$ pasti memiliki elemen tak nol hanya pada kolom ke-$p$.*

**Bukti**

Diberikan matriks $x = [x_{ij}]$ untuk $i = 1,2, \dots, n$, dan $j = 1,2, \dots, n$ dengan $x_{pj} = 0$ untuk $j = 1,2, \dots, n$. Diambil sebarang $z \in V(\Gamma(M_n(\mathfrak{B})))$ dengan $z = [z_{ij}]$ untuk $i = 1,2, \dots, n$, dan $j = 1,2, \dots, n$. Entri ke-$(i, j)$ pada matriks hasil kali $zx$ adalah $\sum_{k=1}^{n} z_{ik}x_{kj}$. Misalkan $z$ adalah pembagi nol kiri dari $x$ dengan kolom ke-$t$ sebagai kolom nol, maka diperoleh $zx = 0$. Dengan demikian entri ke-$(i, j)$ dai $zx$ adalah nol, yaitu $z_{ik}x_{kj} = 0$ untuk setiap $i, j, k = 1,2, \dots, n$.

Diandaikan $z$ memuat elemen tak nol pada kolom ke-$m$, $m \neq p$. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $z_{lm}$ adalah elemen tak nol di $z$ pada kolom ke-$m$. Karena itu pada hasil kali $zx$ akan terdapat jumlahan dari bentuk $z_{lm}x_{mj}$ untuk $j = 1,2,\dots,n$. Karena baris ke-$p$ merupakan satu-satunya kolom nol di $x$, maka $x_{mj} \neq 0$ untuk setidaknya suatu $j = 1,2,\dots,n$. Sebut saja entri tak nol tersebut $x_{mq}$, sehingga $x_{lm}x_{mq} \neq 0$. Dengan demikian $zx \neq 0$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesa bahwa $z$ merupakan pembagi nol kiri dari $x$. Jadi, terbukti bahwa $z$ merupakan pembagi nol kiri dari $x$ yang elemen tak nol-nya hanya pada kolom ke-$p$.

**Teorema 3.11** *Diberikan $x, y \in R'$.*
*1. Jika posisi baris nol dari $x$ dan $y$ tidak setelak maka $d(x,y) = 3$*
*2. Jika posisi baris nol dari $x$ dan $y$ setelak maka $d(x,y)$ =2.*

**Bukti**

Diambil $x, y \in R'$, maka $d(x,y) \neq 1$.

1. Misalkan posisi baris nol dari $x$ dan $y$ tidak seletak. Tanpa mengurangi kemumuman, diasumsikan bahwa baris ke-$p$ dari $x$ adalah baris nol dan baris ke-$q$ dari $y$ adalah baris nol. Dengan lemma 2.9, setiap pembagi nol kiri dari $x$ memiliki elemen tak nol hanya pada kolom ke-$p$ dan setiap pembagi nol kiri dari $y$ memiliki elemen tak nol hanya pada kolom ke-$q$, sehingga $x$ dan $y$ tidak memiliki pembagi nol kiri yang sama. Oleh keran itu $d(x,y) \neq 2$. Dengan teorema 4.1 diperoleh $d(x,y) = 3$
2. Misalkan posisi baris nol dari $x$ dan $y$ seletak. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan bahwa baris ke-$p$ dari $x$ dan baris ke-$p$ dari $y$ adalah baris nol. Dengan lemma 2.9, maka keduanya memiliki pembagi nol kiri dengan elemen tak nol hanya pada kolom ke-$p$. Oleh karena itu, terdapat pembagi nol kiri yang sama untuk $x$ dan $y$. Jadi $d(x,y) = 2$.

**Lemma 3.4** *Jika $x$ adalah pembagi nol kiri dengan kolom ke-$q$ sebagai satu-satunya kolom nol maka setiap pembagi nol kanan dari $x$ pasti memiliki elemen tak nol hanya pada baris ke-$q$.*

**Bukti**

Diberikan matriks $x = [x_{ij}]$ untuk $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$ dengan $x_{iq} = 0$ untuk $j = 1,2,\dots,n$. Diambil sebarang $z \in V(\Gamma(M_n(\mathfrak{B})))$ dengan $z = [z_{ij}]$ untuk $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$. Entri ke-$(i,j)$ pada matriks hasil kali $xz$ adalah $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}z_{kj}$. Misalkan $z$ adalah pembagi nol kanan dari $x$ dengan baris ke-$t$ sebagai baris nol, maka diperoleh $xz = 0$. Dengan demikian entri ke-$(i,j)$ dai $xz$ adalah nol, yaitu $x_{ik}z_{kj} = 0$ untuk setiap $i, j, k = 1,2, \dots, n$.

Diandaikan $z$ memuat elemen tak nol pada baris ke-$m$, $m \neq q$. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $z_{ml}$ adalah elemen tak nol di $z$ pada baris ke-$m$. Karena itu pada hasil kali $xz$ akan terdapat jumlahan dari bentuk $x_{im}z_{ml}$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Karena kolom ke-$q$ merupakan satu-satunya kolom nol di $x$, maka $x_{im} \neq 0$ untuk setidaknya satu $i = 1,2, \dots, n$. Sebut saja entri tak nol tersebut $x_{qm}$, sehingga $x_{qm}z_{ml} \neq 0$. Dengan demikian $xz \neq 0$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesa bahwa $z$ merupakan pembagi nol kanan dari $x$. Oleh karena itu terbukti bahwa $z$ merupakan pembagi nol kanan dari $x$ yang elemen tak nol-nya hanya pada baris ke-$q$.

**Teorema 3.8** *Diberikan* $x, y \in L'$.

*1. Jika posisi kolom nol dari* $x$ *dan* $y$ *tidak setelak maka* $d(x, y) = 3$

*2. Jika posisi kolom nol dari* $x$ *dan* $y$ *setelak maka* $d(x, y)$ *=2.*

**Bukti**

Diambil $x, y \in L'$, maka $d(x, y) \neq 1$.

1. Misalkan posisi kolom nol dari $x$ dan $y$ tidak seletak. Tanpa mengurangi kemumuman, diasumsikan bahwa kolom ke-$p$ dari $x$ adalah kolom nol dan kolom ke-$q$ dari $y$ adalah kolom nol. Dengan lemma 2.10, setiap pembagi nol kanan dari $x$ memiliki elemen tak nol hanya pada baris ke-$p$ dan setiap pembagi nol kanan dari $y$ memiliki elemen tak nol hanya pada baris ke-$q$, sehingga $x$ dan $y$ tidak memiliki pembagi nol kanan yang sama. Oleh keran itu $d(x, y) \neq 2$. Dengan teorema 4.1 diperoleh $d(x, y) = 3$
2. Misalkan posisi kolom nol dari $x$ dan $y$ seletak. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan bahwa kolom ke-$p$ dari $x$ dan kolom ke-$p$ dari $y$ adalah baris nol. Dengan lemma 2.10, maka keduanya memiliki pembagi nol kiri dengan elemen tak nol hanya pada kolom ke-$p$. Oleh karena itu, terdapat pembagi nol kiri yang sama untuk $x$ dan $y$. Jadi $d(x, y) = 2$.

**SIMPULAN**

Berdasarkan teorema-teorema yang telah dibuktikan, dapat diambil kesimpulan tentang jarak dua verteks pada graf pembagi nol dari semiring matriks atas semiring boolean $\Gamma(M_n(\mathfrak{B}))$ sebagai berikut:

1. Untuk verteks-verteks x dan $y$ yang masing-masing termuat dalam himpunan pembagi nol yang berbeda (kiri dan kanan), diperoleh $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq 2$
2. Untuk verteks-verteks x dan y yang keduanya termuat dalam himpuan pembagi nol yang sama diperoleh:

a. Jika posisi baris nol atau kolom nol dari x dan y tidak setelak maka $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 3$
b. Jika posisi baris nol atau kolom nol dari x dan y setelak maka $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2$.

Dengan demikian diperoleh diameter dari graf $\Gamma\big(M_n(\mathfrak{B})\big)$ adalah 3.

## DAFTAR PUSTAKA

Anderson D.F and Livingston P.S., 1999, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, Vol. 217 : 434-447.

Beck I., 1988, Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, Vol. 116 : 208-226.

Dozlan D. and Oblak P., 2012, The zero-divisor graphs of rings and semi-rings, *Int. J. Algebra and Computation*, Vol. 22, no. 4, 1250033, 20 str.

Golan J.S., 1999, *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Guzman F., 1992, The Variety of Boolean Semiring, *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 78 : 253-270.

John L. and Vijay H., 2014, Diameter of the Zero Divisor Graph of Semiring of Matrices over Boolean Semiring, *International Mathematical Forum*, Vol. 9 no. 29 : 1369 – 1375.

Kuich W. and Salomaa A., 1986, *Semirings*, Automata, Languages, Springer, Berlin.

Redmond S.P., 2002, The zero divisor graph of a non-commutative ring, *Int. J. Commut. Rings*, Vol. 1 no. 4 : 203-211.